Эссэ. О преимуществах рекурсивной записи цепных дробей

Автор предложил новую рекурсивную формулу записи цепных дробей
Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь

1. Бесконечной цепной дробью называют выражение [1, с. 267]

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}}$$

Примеры такой записи можно встретить в [2, с.268]

360. Подобным образом другая форма непрерывных дробей

$$a + \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} + \frac{\gamma}{d} + \frac{\delta}{e} + \frac{\varepsilon}{f} + \text{ и т. д.,}$$

Рис. 1

и в [5]

$$\frac{{}_2F_0(a,b;z)}{{}_2F_0(a,b+1;z)} = 1 + \cfrac{az}{(b+1)z - 1 - \cfrac{(a+1)(b+1)z^2}{(a+b+3)z - 1 - \cfrac{(a+2)(b+2)z^2}{(a+b+5)z - 1 - \ddots}}},$$

Рис. 2

Некоторые авторы (например [7, 8]) пользуются видом записи, предложенным О. Перроном

как последовательность подходящих дробей непрерывной дроби

$$\zeta(3) = \frac{6|}{|5} - \frac{1|}{|117} - \frac{64|}{|535} - \cdots - \frac{n^6|}{|34n^3 + 51n^2 + 27n + 5} - \cdots, \qquad (1)$$

Рис. 3

Теорема 2. *Справедливо следующее разложение в непрерывную дробь*

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1|}{|2} + \frac{2|}{|4} + \frac{1|}{|3} + \frac{4|}{|2} + \frac{2|}{|4} + \frac{6|}{|6} + \frac{4|}{|5} + \frac{9|}{|4} + \frac{6|}{|6} + \frac{12|}{|8} + \frac{9|}{|7} + \frac{16|}{|6} + \cdots, \quad (4)$$

где числители a_n, $n \geqslant 2$, *и знаменатели* b_n, $n \geqslant 1$, *определяются по формулам*

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k+2, & a_{4k+1} &= k(k+1), \\ b_{4k+2} &= 2k+4, & a_{4k+2} &= (k+1)(k+2), \\ b_{4k+3} &= 2k+3, & a_{4k+3} &= (k+1)^2, \\ b_{4k+4} &= 2k+2, & a_{4k+4} &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

Рис. 4

the famous result of R. Apéry [R.Apéry, 1981],

$$(0.2) \qquad \zeta(3) = b_0^\vee + \frac{a_1^\vee|}{|b_1^\vee} + \frac{a_2^\vee|}{|b_2^\vee} + \ldots + \frac{a_\nu^\vee|}{|b_\nu^\vee} + \ldots$$

with

$$(0.3) \qquad b_0^\vee = 0,\ b_1^\vee = 5,\ a_1^\vee = 6,\ b_{\nu+1}^\vee =$$

$$34\nu^3 + 51\nu^2 + 27\nu + 5,\ a_{\nu+1}^\vee = -\nu^6,$$

for $\nu \in \mathbb{N}$. We denote by $r_{A,\nu}$ the ν-th convergent of continued fraction (0.2).

Рис. 5

Оригинальный способ записи предложен Henry Cohen [6]

For instance, the continued fraction

$$\log(2) = 3/(5 - 9 \cdot 1^2/(15 - 9 \cdot 2^2/(25 - 9 \cdot 3^2/(35 - 9$$

given above is represented by

```
[[0,10*n-5],[3,-9*n^2]]
```

Рис. 6

Современные авторы пользуются в основном видом записи, предложенным Роджерсом:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 + \cdots} \frac{a_n}{b_n + \cdots},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – частные числители дроби, $b_1, b_2, \dots, b_n$ – частные знаменатели. Считается, что все a_n и b_n конечны и не равны нулю (см. [1,2]). Кроме того, обычно b_0 – произвольное число

Последнее время в англоязычной литературе используется обозначение

$$b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Автор предложил (2009г., [9]) и ввёл в оборот (2011г., сайт OEIS.org) рекурсивную запись цепной дроби следующего вида с начальным значением индекса равным нолю (формулировка как в [9]):

Определение (4) Выражение $E_n = \varphi_{1(n)} + \frac{P_{1(n)}}{\varphi_{2(n)}+} \frac{P_{2(n)}}{\varphi_{3(n)}+} \frac{P_{3(n)}}{\varphi_{4(n)}+} \frac{P_{4(n)}}{\varphi_{5(n)}+} \cdots + \frac{P_{k-1(n)}}{\varphi_{k(n)}+} \frac{P_{k(n)}}{E_{n+1}}$ (1.1.2)

где $i = 1, 2, \dots, k$, а $\varphi_{i(n)}$ и $P_{i(n)}$ выполняют условие нормальности, назовём n-ым звеном условно-периодической цепной дроби с периодом k, саму дробь – k-ступенчатой; n-ое звено дроби также назовём k-ступенчатым .

Рис. 7

Для одноступенчатых ЦД

$$Q_k = A_k + \frac{B_k}{Q_{k+1}},$$

где все A_k и B_k одновременно не равны нолю и хотя бы один из них является функцией от индекса $k = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$. Причем $A_0 = A_{k=0}$, а не произвольное число. Автор назвал такие дроби условно-периодическими, поскольку такой вид записи отражает структуру цепной дроби (обычно с постоянным периодом; но в [9] автор привёл пример условно-периодической цепной дроби с возрастающим периодом).

Достоинствами такой записи являются:

1 Наглядность и однозначность записи.

Например, в [2, с.120] приведена формула для $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 -} \frac{x^2}{3 -} \frac{x^2}{5 -} \frac{x^2}{7 -} \frac{x^2}{9 -} \cdots - \frac{x^2}{2n + 1 -} \cdots, \qquad (1)$$

в рекурсивной записи это одноступенчатая цепная дробь

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{x}{T_0} \\ T_k &= 2k + 1 - \frac{x^2}{T_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Там же [2, с.122] приведена другая формула для $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{5x^3}{15 - 7x^2 +} \frac{x^2}{1 +} \frac{9x^2}{315 - 28x^2 +} \frac{5x^2}{1 +} \frac{13x^2}{1287 - 44x^2 +} \cdots$$

$$\cdots + \frac{(4n + 1)x^2}{(4n - 3)(4n - 1)(4n + 1) - 4(4n - 1)x^2 +} \frac{(4n - 3)x^2}{1 +} \cdots. \qquad (3)$$

Видим, что первые члены этой дроби не совпадают с "общей" формулой, приведенной в конце.

2. В рекурсивной записи возможны разные варианты записи

Например для (3) – два варианта записи (обе – двухступенчатые цепные дроби):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}x &= x + \frac{5x^3}{T_0 + 5x^2} \\ T_k &= (4k+1)(4k+3)(4k+5) - 4(4k+3)x^2 + \cfrac{(4k+1)x^2}{1 + \cfrac{(4k+9)x^2}{T_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}x &= x + \cfrac{5x^3}{15 - 7x^2 + \cfrac{x^2}{H_0}} \\ H_k &= 1 + \cfrac{(4k+9)x^2}{(4k+5)(4k+7)(4k+9) - 4(4k+7)x^2 + \cfrac{(4k+5)x^2}{H_{k+1}}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

3. Рекурсивная запись позволяет рассматривать *многоступенчатые* цепные дроби, например такие (обе – четырёхступенчатые цепные дроби):

$$\left.\begin{aligned} e^x &= E_0 - 1 \\ E_k &= 2 + \cfrac{x}{4k+1 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{4k+3 - \cfrac{x}{E_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x} &= C_0 - 1 \\ C_k &= 2 + \cfrac{x}{4k+1 - \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{4k+3 + \cfrac{x}{C_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

и приводить их к одноступенчатым "родственным", связанным с ними дробно-линейными соотношениями.

Пример.

Пусть $E_0 = e - 1,\ E_k = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2k+2 + \cfrac{1}{E_{k+1}}}}$

$$E_k = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2k+2 + \cfrac{1}{E_{k+1}}}} = \frac{1}{2k+3}(4k+5) - \frac{\frac{1}{2k+3}(4k+5) - 2}{(2k+3)E_{k+1} + 1} =$$

$$= \frac{1}{2k+3}(4k+5) - \frac{-\frac{1}{2k+3}}{(2k+3)E_{k+1} + 1} = \frac{1}{2k+3}(4k+5) + \frac{1}{2k+3}\,\frac{1}{(2k+3)E_{k+1} + 1}$$

$$E_k = \frac{1}{2k+3}(4k+5) + \frac{1}{2k+3}\,\frac{1}{(2k+3)E_{k+1} + 1}$$

Пусть $R_{k+1} = (2k+3)E_{k+1} + 1$, тогда

$R_k = (2k+1)E_k + 1$

$$R_0 = E_0 + 1 = e$$

$$R_k = (2k+1)\left(\frac{1}{2k+3}(4k+5) + \frac{1}{2k+3}\,\frac{1}{R_{k+1}}\right) + 1.$$

Пусть $R_k = \dfrac{(2k+1)U_k}{2k+3}$, тогда

$$(2k+1)U_k = (2k+1)(4k+5) + \frac{(2k+1)(2k+5)}{U_{k+1}}$$

$$U_0 = 3R_0 = 3e$$

$$U_k = 4k+5 + \frac{2k+5}{U_{k+1}}$$

Итого

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 3e \\ U_k &= 4k+5 + \frac{2k+5}{U_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Другой вариант:

$E_k = 1 + \dfrac{1}{R_k}$, где

$$R_k = 1 + \cfrac{1}{2k+2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{R_{k+1}}}}, \text{ и } R_0 = \frac{1}{E_0 - 1} = \frac{1}{e-2};$$

тогда

$$R_k = 1 + \cfrac{1}{2k+2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{R_{k+1}}}} = \frac{1}{2k+3}(2k+4) + \frac{1}{2k+3}\,\frac{1}{(2k+3)R_{k+1} + (2k+2)}$$

Пусть $R_k = \dfrac{U_k}{2k+3}$, тогда

$$U_k = 2k+4 + \frac{2k+5}{U_{k+1}}$$

$$U_0 = \frac{3}{e-2}$$

Итого

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{3}{e-2} \\ U_k &= 2k+4 + \frac{2k+5}{U_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

И так далее и тому подобное.

4. После модификации формулы Эйлера связи *исходного ряда* и условно-периодической цепной дроби возникла необходимость в следующем определении:

Определение *Исходным рядом* условно-периодической цепной дроби является ряд, члены которого используются для построения этой цепной дроби

Эйлер предложил такое построение цепной дроби, которое является другой формой записи исходного ряда.

Модифицированная формула (в виде рекурсивной записи) выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} &C = \sum_{k=0}^{\infty} A(k) = A(0)\left(1 + \frac{1}{T_0 - 1}\right);\ B_k = \frac{A(k)}{A(k+1)} \neq 0 \\ &T_0 = 1 + \frac{A(0)}{C - A(0)} \\ &T_k = 1 + B_k - \frac{B_k}{T_{k+1}} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Из этой формулы связи вытекает:

4.1. В области сходимости исходного ряда цепная дробь есть *равноценная* ему.

4.2. В области расходимости исходного ряда $|\lim_{k\to\infty} C| = \infty$ значение цепной дроби T_0 стремится к 1. Пример такого случая приведен в [9].

Замечание. В результате преобразования цепной дроби T_0 может появиться "родственная"– например, W_0– значение которой в последнем случае, вообще говоря, обычно не совпадает со значением T_0.

Пример. Пусть $C = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k + 1 + \frac{p^k}{k!}\right)$ – исходный ряд, где p – действительное число (для определённости). Ряд расходится при любом p. Причём, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{p^k}{k!}\right)$ – сходится при любом p, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)$ – расходится при любом p.

Строим цепную дробь по формуле для двух рядов (см. ниже) и после несложных упрощений получаем:

$$W_k = p^k + k!(k+1) - \cfrac{k!(k+2)!}{k!(k+2) + p^k - \cfrac{p^{2k+1}}{W_{k+1}}}$$

Значения $W_0(p)$ таковы:

$W_0(1)$ =1.2090957459230850594381892502813384155484344923463708…

с точностью до 7.562413879870*10^(-27767)

$W_0(2)$ =1.1548602837499815820548620284895354719113364868348169125680…

с точностью до 1.20863420*10^(-24757)

$W_0(10)$ =1.04625331718302157477385260544666575417032082795607…

с точностью до 5.147463845288151165550 10^(-17837)

Определение Значения нулевого звена цепных дробей в рекурсивной форме записи – *исконное* значение соответствующей цепной дроби

Пример.

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}x = x + \frac{5x^3}{T_0 + 5x^2} \\ &T_k = (4k+1)(4k+3)(4k+5) - 4(4k+3)x^2 + \cfrac{(4k+1)x^2}{1 + \cfrac{(4k+9)x^2}{T_{k+1}}} \\ &T_0 = \frac{5x^3}{\operatorname{tg}(x) - x} - 5x^2, x \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} e &= 2 + \frac{3}{U_0} \\ U_k &= 2k + 4 + \frac{2k+5}{U_{k+1}} \\ U_0 &= \frac{3}{e-2} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

5. Рекурсивная запись позволила вывести формулы цепной дроби для суммы нескольких исходных рядов:

5.1. Для суммы двух рядов

$$\left.\begin{aligned} C(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(A(k)+B(k)) = A(0)Q_0 \\ Q_0 &= \frac{C(x)}{A(0)} \\ Q_k &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{A(k)}{B(k)} - \cfrac{\frac{A(k)}{B(k)}A(k+1)}{A(k+1) + \cfrac{B(k)}{Q_{k+1}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$Q_k = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{A(k)}{B(k)} - \cfrac{\frac{A(k)}{B(k)}}{1 + \cfrac{\frac{B(k)}{A(k+1)}}{Q_{k+1}}}}$$

5.2. Для суммы трёх рядов

$$\left.\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty}(A(k)+B(k)+C(k)) = A(0)\times Q_0 \\ Q_k &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{A(k)}{B(k)} - \cfrac{\frac{A(k)}{B(k)}}{\cfrac{B(k)}{C(k)} + 1 - \cfrac{\frac{B(k)}{C(k)}}{1 + \cfrac{\frac{C(k)}{A(k+1)}}{Q_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

5.3. Для суммы четырёх рядов

$$
\left.
\begin{aligned}
&S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(A(k) + B(k) + C(k) + D(k))\\
&Q_0 = \frac{S(x)}{A(0)}\\
&Q_k = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{A(k)}{B(k)} - \cfrac{\cfrac{A(k)}{B(k)}}{\cfrac{B(k)}{C(k)} + 1 - \cfrac{\cfrac{B(k)}{C(k)}}{\cfrac{C(k)}{D(k)} + 1 - \cfrac{\cfrac{C(k)}{D(k)}}{1 + \cfrac{\cfrac{D(k)}{A(k+1)}}{Q_{k+1}}}}}}
\end{aligned}
\right\} \qquad (15)
$$

И так далее и тому подобное.

6. Рекурсивная запись позволила вывести новые формулы цепной дроби для тождеств и теорем.

6.1. Новые замечательные тождества для двухступенчатых цепных дробей:

Пусть $Q_k = A_k - \cfrac{x^2}{B_k - \cfrac{x^2}{Q_{k+1}}}$, тогда

$$E_0 = Q_0(x) - x; E_k = A_k - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{B_k + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{E_{k+1}}}}} \qquad (16)$$

$$U_0 = Q_0(-x) + x; U_k = A_k + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{B_k - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{U_{k+1}}}}} \qquad (17)$$

Второй случай таков:

Пусть $Q_k = A_k + \cfrac{x^2}{B_k + \cfrac{x^2}{Q_{k+1}}}$, тогда

$$E_0 = Q_0(x) - x; E_k = A_k - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{B_k - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{E_{k+1}}}}} \qquad (18)$$

$$U_0 = Q_0(-x) + x; U_k = A_k + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{B_k + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{U_{k+1}}}}} \qquad (19)$$

Справедливость тождеств проверяется непосредственно.

6.2. Теорема об "обратной" функции

Пусть $T_k = 1 - \cfrac{\Phi(k,x)}{\Phi(k,x) - \cfrac{P(k,x)}{T_{k+1}}}$ и $F(x) = T_0$, $\Phi(k,x) \neq 0$, $P(k,x) \neq 0$ ни при каких k,x. Тогда

$$F(x) = \frac{1}{Q_0}, \text{ где } Q_k = 1 - \cfrac{\cfrac{\Phi(k,x)}{P(k,x)}}{Q_{k+1}}.$$

6.3. Рекурсивная запись позволяет строить *многоступенчатые* цепные дроби путём замены переменных, в результате чего – кратное увеличение показателя скорости сходимости α_{1000} получаемой цепной дроби.

Определение показателя скорости сходимости α_{1000}

Чтобы наглядно оценить точность вычисления по приведенным выше формулам, предложен следующий параметр:

α_{1000}, который приблизительно (с точностью до одного-двух знаков) показывает число верных десятичных знаков, получеенных за 1000 циклов; например, $\alpha_{1000} = 6,332$ означает, что за 1000 циклов получено, как минимум, 6330 верных знаков искомого числа; то есть, грубо говоря, за один цикл вычисляется 6 верных знаков.

Пример. Пусть $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{Q_0}, Q_k = 4k + 2 + \frac{(k+1)^2}{Q_{k+1}}. \alpha_{1000} = 1,255$

$$R_0 = Q_0, R_k = 4(2k) + 2 + \cfrac{(2k+1)^2}{4(2k+1) + 2 + \cfrac{(2k+1+1)^2}{R_{k+1}}}, \alpha_{1000} = 2,510$$

7. Рекурсивная запись позволяет упрощать запись цепной дроби.

Пример. Рекурсивная запись цепной дроби для $\zeta(3)$ Нестеренко [7] :

$$\left.\begin{aligned} &2 \times \zeta(3) = 2 + \frac{1}{N_0} \\ &N_k = 2k + 2 + \cfrac{(k+1)(k+2)}{2k + 4 + \cfrac{(k+1)^2}{2k + 3 + \cfrac{(k+2)^2}{2k + 2 + \cfrac{(k+1)(k+2)}{N_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Полагая $N_k = 2(k+1)Z_k$ и произведя ряд замен и упрощений получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta(3) = G_0 \\ &G_k = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{(k+1)^3}{(k+1)(2k+3)(2k+4) + \cfrac{(k+2)^3}{G_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

*   *   *   *   *

Литература

1. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби) /Под ред. ЛюстерникаЛ.А. и ЯнпольскогоА.Р. М.: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
2. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1 2- изд. М.: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1961
3. Математический анализ. Вычисление элементарных функций /Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1963
4. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204с.
5. Kerim Belabas, Henri Cohen. Numerical Algorithms for Number Theory:Using Pari/GP. American Mathematical Soc., 2021. – 429 с, ил.
6. Henri Cohen. A Database of Continued Fractions of Polynomial Type 2024г.

http://arxiv.org/abs/2409.06086v1
7. Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$,Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 6, 865–880.
8. L.A.Gutnik. An expansion of zeta(3) in continued fraction with parameter.
9. Гладковский С. Н. Анализ условно-периодических цепных дробей.2-е изд., исправ. — Незлобная: 2009. – 139с.

S.N. Gladkovskii

Essays. About the advantages of recursive recording of continued fraction

The author proposed a new formula recursive recording of continued fraction

Keywords: continued fraction, chain fraction

Гладковский Сергей Николаевич

E-mail: journaly2010@bk.ru